

Zwei Nicht-parametrisch Tests

Martin Kolb

Universität Paderborn

12. Januar 2022



Erinnerung: Statistische Tests

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Modell, $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ eine disjunkte Zerlegung in **Nullhypothese** und **Alternative**.



Erinnerung: Statistische Tests

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Modell, $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ eine disjunkte Zerlegung in **Nullhypothese** und **Alternative**.

Wir suchen ein Verfahren, um anhand von Beobachtungswerten x_1, \dots, x_n zu entscheiden, ob wir

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ (die Nullhypothese) oder

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ (die Alternative)

für plausibler halten (und zugleich eine geeignete Art, „ \hat{A} “
‘plausibler’ zu quantifizieren).



Ist die Varianz unbekannt, so ist es wie im Fall von Konfidenzintervallen, so benutzt man

Rezept 2: t-Test

Annahmen: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Es gelte also insbesondere $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Wir kennen die Varianz nicht

Hypothesen:

- $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

Teststatistik:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

wobei $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ und $S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Ablehnungskriterium für H_0 bei Niveau α :

- $|T| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$
- $T < t_{n-1, \alpha}$
- $T > t_{n-1, 1-\alpha}$



Beispiel: t-Test

Die Wirkung zweier Schlafmittel A und B sollen verglichen werden. Dazu werden $n = 10$ Patienten in zwei aufeinander folgenden Nächten die Medikamente A und B verabreicht werden und die Differenz der jeweiligen Schlafdauer gemessen. Letztere wird als normalverteilt angenommen mit unbekannten Parametern μ und σ .



Beispiel: t-Test

Die Wirkung zweier Schlafmittel A und B sollen verglichen werden. Dazu werden $n = 10$ Patienten in zwei aufeinander folgenden Nächten die Medikamente A und B verabreicht werden und die Differenz der jeweiligen Schlafdauer gemessen. Letztere wird als normalverteilt angenommen mit unbekannten Parametern μ und σ .

Es ergibt sich für die Differenz der Schlafdauern

1,2|2,4|1,3|1,3|0,0|1,0|1,8|0,8|4,6|1,4



Beispiel: t-Test

Die Wirkung zweier Schlafmittel A und B sollen verglichen werden. Dazu werden $n = 10$ Patienten in zwei aufeinander folgenden Nächten die Medikamente A und B verabreicht werden und die Differenz der jeweiligen Schlafdauer gemessen. Letztere wird als normalverteilt angenommen mit unbekannten Parametern μ und σ .

Es ergibt sich für die Differenz der Schlafdauern

$$1,2|2,4|1,3|1,3|0,0|1,0|1,8|0,8|4,6|1,4$$

Wir wählen das Niveau $\alpha = 0,01$. Für den vorliegenden Datensatz ergibt

$$\bar{x} = 1,58 \quad S^2 = 1,513$$

Wir testen die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ gegen $H_1 : \mu \neq 0$.
Dann ergibt sich in unserem Fall

$$T(x) = 1,58\sqrt{10},513 = 4,06.$$

Beispiel: t-Test

Die Wirkung zweier Schlafmittel A und B sollen verglichen werden. Dazu werden $n = 10$ Patienten in zwei aufeinander folgenden Nächten die Medikamente A und B verabreicht werden und die Differenz der jeweiligen Schlafdauer gemessen. Letztere wird als normalverteilt angenommen mit unbekannten Parametern μ und σ .

Es ergibt sich für die Differenz der Schlafdauern

$$1,2|2,4|1,3|1,3|0,0|1,0|1,8|0,8|4,6|1,4$$

Wir wählen das Niveau $\alpha = 0,01$. Für den vorliegenden Datensatz ergibt

$$\bar{x} = 1,58 \quad S^2 = 1,513$$

Wir testen die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ gegen $H_1 : \mu \neq 0$. Dann ergibt sich in unserem Fall

$$T(x) = 1,58\sqrt{10},513 = 4,06.$$

Da $t_{9,0,995} = 3,25$ gilt, wird die Nullhypothese aufgrund der Daten verworfen.

Mediantest

Modell: X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt reellwertig mit Verteilung f_X mit Median m . Wir möchten anhand von Beobachtungen x_1, \dots, x_n prüfen, ob $m = m_0$ plausibel ist, d.h. wir testen

$$H_0 : m := m_0 \text{ gegen } H_1 : m \neq m_0$$



Mediantest

Modell: X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt reellwertig mit Verteilung f_X mit Median m . Wir möchten anhand von Beobachtungen x_1, \dots, x_n prüfen, ob $m = m_0$ plausibel ist, d.h. wir testen

$$H_0 : m := m_0 \text{ gegen } H_1 : m \neq m_0$$

Sei dazu

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$$

die Ordnungsstatistik und sei $\alpha \in (0, 1)$.



Mediantest

Modell: X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt reellwertig mit Verteilung f_X mit Median m . Wir möchten anhand von Beobachtungen x_1, \dots, x_n prüfen, ob $m = m_0$ plausibel ist, d.h. wir testen

$$H_0 : m := m_0 \text{ gegen } H_1 : m \neq m_0$$

Sei dazu

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$$

die Ordnungsstatistik und sei $\alpha \in (0, 1)$. Wähle nun k (möglichst groß) mit

$$\text{Bin}_{n,1/2}(\{0, \dots, k-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Wenn

$$m_0 \in [x_{(k)}, x_{(n-k+1)}],$$

so bleibe man bei H_0 , ansonsten verwerfe zugunsten von H_1 .
Dieser Test hält das Niveau α ein.

Mediantest: Theoretische Begründung

Sei f_X die Dichte einer Verteilung auf \mathbb{R} mit Median m_0 und seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte f_X . Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(k)} > m_0) &= \mathbb{P}(|\{1 \leq i \leq n : X_i \leq m_0\}| \leq k-1) \\ &= \text{Bin}_{n,1/2}(\{0, \dots, k-1\}) \leq \frac{\alpha}{2},\end{aligned}$$

analog ist

$$\mathbb{P}(X_{(k)} < m_0) = \mathbb{P}(|\{1 \leq i \leq n : X_i \geq m_0\}| \leq k-1) \leq \frac{\alpha}{2}$$

somit

$$\mathbb{P}(m_0 \notin [X_{(k)}, X_{(n-k-1)}]) \leq \mathbb{P}(X_{(k)} > m_0) + \mathbb{P}(X_{(n-k-1)} < m_0) \leq \alpha.$$

Beachte, dass für eine Verteilung mit einer Dichte stets $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$ ($i \neq j$) und $\mathbb{P}(X_i = m_0) = 0$ gelten.

Wilcoxon-Test

Ein 'verteilungsfreier' Test, mit dem man die Lage zweier Verteilungen zueinander testen kann.



Wilcoxon-Test

Ein 'verteilungsfreier' Test, mit dem man die Lage zweier Verteilungen zueinander testen kann.

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{und} \quad Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$



Wilcoxon-Test

Ein 'verteilungsfreier' Test, mit dem man die Lage zweier Verteilungen zueinander testen kann.

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{und} \quad Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die Nullhypothese:

X und Y haben dieselbe Verteilung

testen gegen die Alternative

Die beiden Verteilungen sind gegeneinander verschoben.



Idee hinter Wilcoxon-Test

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{und} \quad Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.



Idee hinter Wilcoxon-Test

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{und} \quad Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $n + m$ Beobachtungen



Idee hinter Wilcoxon-Test

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{und} \quad Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $n + m$ Beobachtungen
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X -Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \dots, m + n\}$.



Idee hinter Wilcoxon-Test

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{und} \quad Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $n + m$ Beobachtungen
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X -Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \dots, m + n\}$.
- Berechne die Summe der X -Ränge, prüfe, ob diese untypisch groß oder klein ist.



Wilcoxons Rangsummenstatistik

Bemerkung 1:

Die Statistik

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

heißt Wilcoxons Rangsummenstatistik. Die Normierung ist so gewählt, dass $0 \leq W \leq mn$.



Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung 1:

Die Statistik

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

heißt Wilcoxon's Rangsummenstatistik. Die Normierung ist so gewählt, dass $0 \leq W \leq mn$. Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Summe der } X\text{-Ränge} + \text{Summe der } Y\text{-Ränge} &= \text{Summe aller Ränge} \\ &= 1 + 2 + \dots + (m + n) \\ &= \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung 2:

Der Wilcoxon-Test heißt auch Mann-Whitney-Test, die Rangsummenstatistik auch Mann-Whitney Statistik U , sie unterscheidet sich (je nach Definition) von W um eine Konstante.



Wilcoxon-Test: Beispiel

Beobachtungen:

X : 1,5; 5,5; 35,2 und

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8



Wilcoxon-Test: Beispiel

Beobachtungen:

$X : 1,5; 5,5; 35,2$ und

$Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8$

Lege Beobachtungen zusammen

1,5 | 5,5 | 7,9 | 35,2 | 38,1 | 41,0 | 56,7 | 112,1 | 197,4 | 381,8
 X X Y X Y Y Y Y Y Y



Wilcoxon-Test: Beispiel

Beobachtungen:

$X : 1,5; 5,5; 35,2$ und

$Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8$

Lege Beobachtungen zusammen

$1,5 | 5,5 | 7,9 | 35,2 | 38,1 | 41,0 | 56,7 | 112,1 | 197,4 | 381,8$
 $\underset{X}{} \underset{X}{} \underset{Y}{} \underset{X}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{}$

Bestimme die Ränge:

$1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10$
 $\underset{X}{} \underset{X}{} \underset{Y}{} \underset{X}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{} \underset{Y}{}$



Wilcoxon-Test: Beispiel

Beobachtungen:

$X : 1,5; 5,5; 35,2$ und

$Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8$

Lege Beobachtungen zusammen

1,5|5,5|7,9|35,2|38,1|41,0|56,7|112,1|197,4|381,8
 $\underset{X}{} \quad \underset{X}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{X}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{}$

Bestimme die Ränge:

1|2|3|4|5|6|7|8|9|10
 $\underset{X}{} \quad \underset{X}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{X}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{} \quad \underset{Y}{}$

Rangsummenstatistik hier:

$$W = 1 + 2 + 4 - (1 + 2 + 3) = 1$$



Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 0$$



Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & Y & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 1$$



Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & Y & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 1$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & Y & X & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 2$$



Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & Y & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 1$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & Y & X & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 2$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & Y & Y & X & Y & Y & Y & Y & Y \end{array} \Rightarrow W = 3$$



Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 0$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 1$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 2$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 3$$

X -Population größer $\Rightarrow W$ groß:

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \end{array} \Rightarrow W = 21$$



Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 0$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 1$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 2$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 3$$

X -Population größer $\Rightarrow W$ groß:

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \end{array} \Rightarrow W = 21$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \end{array} \Rightarrow W = 20$$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\Rightarrow W$ klein:

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 0$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 1$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 2$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \end{array} \Rightarrow W = 3$$

X -Population größer $\Rightarrow W$ groß:

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \end{array} \Rightarrow W = 21$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \end{array} \Rightarrow W = 20$$

$$\begin{array}{c} 1|2|3|4|5|6|7|8|9|10 \\ \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{Y} \quad \underline{Y} \quad \underline{X} \quad \underline{X} \end{array} \Rightarrow W = 19$$

Signifikanz

Nullhypothese:

X -Stichprobe und Y -Stichprobe stammen aus derselben Verteilung.



Signifikanz

Nullhypothese:

X -Stichprobe und Y -Stichprobe stammen aus derselben Verteilung.

Die 3 Ränge der X -Stichprobe

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y

hatten genausogut irgendwelche 3 Ränge sein können.



Signifikanz

Nullhypothese:

X -Stichprobe und Y -Stichprobe stammen aus derselben Verteilung.

Die 3 Ränge der X -Stichprobe

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline X & X & Y & X & Y & Y & Y & Y & Y & Y \end{array}$$

hatten genausogut irgendwelche 3 Ränge sein können.

Es gibt

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(n-1)}{m(m-1)\cdots 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Möglichkeiten.



Signifikanz

Nullhypothese:

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich wahrscheinlich, also

$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}.$$

In unserem Beispiel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y

war $W = 1$.



Es gilt

$$\begin{aligned} P(W \leq 1) + P(W \geq 20) &= P(W = 0) + P(W = 1) \\ &\quad + P(W = 20) + P(W = 21) \\ &= \frac{1 + 1 + 1 + 1}{120} = 0,033 \end{aligned}$$



Prinzipien hinter Statistischem Testen

Nehmen wir an, wir möchten eine gewisse Aussage anhand 'experimenteller oder empirischer' Daten statistisch prüfen. Das korrekte (=lehrbuchmäßige) Vorgehen sieht folgendermaßen aus:

- Statistisches Modell formulieren, Nullhypothese und Alternative angeben (was die Nullhypothese ist, hängt von der konkreten 'Anwendungsfrage' ab, oft ernennt man das Gegenteil dessen, was man erharten möchte – zur Nullhypothese).



Prinzipien hinter Statistischem Testen

Nehmen wir an, wir möchten eine gewisse Aussage anhand 'experimenteller oder empirischer' Daten statistisch prüfen. Das korrekte (=lehrbuchmäßige) Vorgehen sieht folgendermaßen aus:

- Statistisches Modell formulieren, Nullhypothese und Alternative angeben (was die Nullhypothese ist, hängt von der konkreten 'Anwendungsfrage' ab, oft ernennt man das Gegenteil dessen, was man erharten möchte – zur Nullhypothese).
- Dann einen Test (einschließlich gewünschtem Niveau) festlegen.



Prinzipien hinter Statistischem Testen

Nehmen wir an, wir möchten eine gewisse Aussage anhand 'experimenteller oder empirischer' Daten statistisch prüfen. Das korrekte (=lehrbuchmäßige) Vorgehen sieht folgendermaßen aus:

- Statistisches Modell formulieren, Nullhypothese und Alternative angeben (was die Nullhypothese ist, hängt von der konkreten 'Anwendungsfrage' ab, oft ernennt man das Gegenteil dessen, was man erharten möchte – zur Nullhypothese).
- Dann einen Test (einschließlich gewünschtem Niveau) festlegen.
- Dann erst: Daten erheben (bzw. Daten anschauen), Test-Entscheidung fallen



Zusammenfassung: Statistisches Testen

Man sollte dieselben Daten nicht für explorative Statistik (d.h. Beobachtungen, die zu neuen Hypothesen führen [sollen]) und schließende Statistik (d.h. Beobachtungen, anhand denen eine Hypothese getestet werden soll) zugleich verwenden

